CALCULO DE LA ECUACIÓN DE UN PLANO DEFINIDO POR TRES PUNTOS

Considérese un conjunto de tres puntos como una nube de puntos ***P***. Defínanse los valores de las coordenadas XYZ de cada punto como:

$$P_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

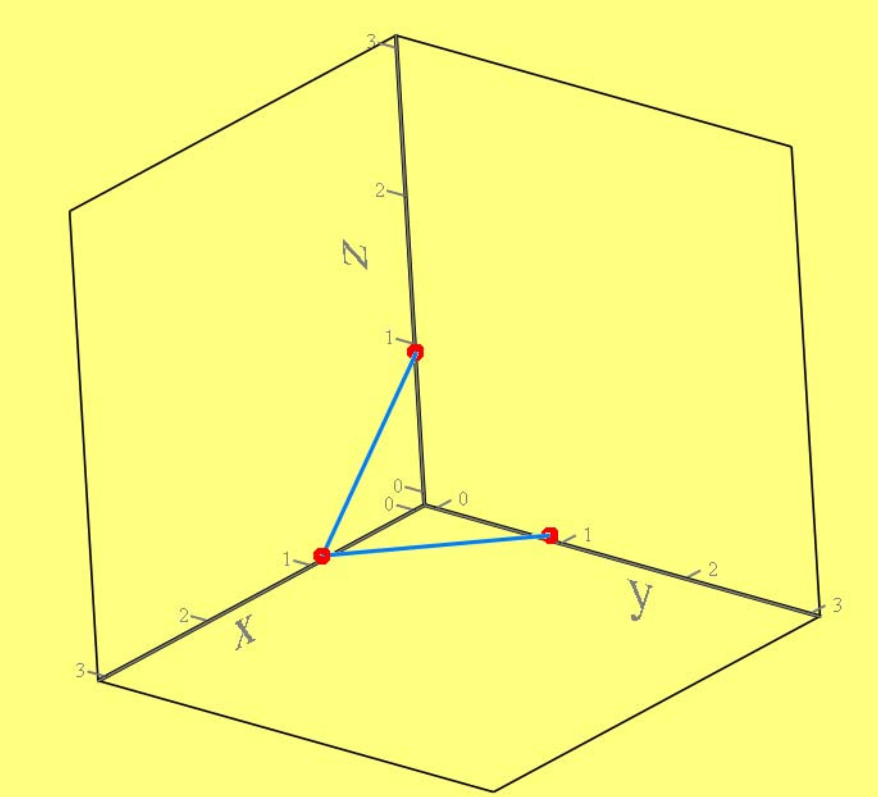

Fig. 1.- Nube de puntos P y Vectores del plano

P

En donde la posicion del elemento de cada punto son las coordenadas:

$X := 0 \qquad Y := 1 \qquad Z := 2$

Los vectores marcados por las líneas de la figura 1. Los valores de sus componentes son:

Vectores

$$V1 := P_1 - P_0 \qquad\qquad V2 := P_2 - P_0$$

la normal se calcula con la ecuación (1):

Vector normal

$$N := V2 \times V1 \qquad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Ec. (1a)

el vector unitario de la normal es entonces

$$n := \frac{N}{|N|} \qquad n = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$$ Ec. (1b)

El área del triángulo es:

$$A := \frac{1}{2} \cdot |N| \qquad \boxed{A = 0.866}$$ Ec. (2)

La ecuación general del plano en función del punto $\boldsymbol{P_0}$ y el vector normal $\boldsymbol{N}$ es la ecuación (3):

$$f(x,y,z) := N_X \cdot \left[x - \left(P_0\right)_X\right] + N_Y \cdot \left[y - \left(P_0\right)_Y\right] + N_Z \cdot \left[z - \left(P_0\right)_Z\right]$$ Ec. (3)

Resolviendo: $f(x,y,z) \rightarrow x + y + z - 1$

Finalmente, la distancia de cualquier punto al plano es:

$$\Delta(\Phi) := \frac{f\left(\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z\right)}{|N|}$$ Ec. (4)

Ejemplo #1. Suponga un punto O en el origen y calcule la distancia con respecto al plano.

Para definir un punto en el origen bastan las coordenadas:

$$O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la distancia al plano se calcula usando la ecuación (4):

$$\boxed{\Delta(O) = -0.577}$$

Ejemplo #2. Suponga un punto en el centro de los 3 puntos y calcule la distancia con respecto al plano:

Las coordenadas baricentricas del triángulo se calculan con la ecuación (5):

$$\phi := \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{2} P_i \qquad \text{Ec. (5)}$$

Que como se habrá presupuesto, tiene la distancia al origen como se calculó en el ejemplo anterior #1:

$$|\phi| = 0.577$$

Utilizando el centro de gravedad calculado con (5), se utiliza la ec. (4) para calcular la distancia:

$$\boxed{\Delta(\phi) = 0}$$

El archivo PDF se encuentra en este link.