RECTA 3D

Interpolación lineal

Considere los puntos P y Q en R3:

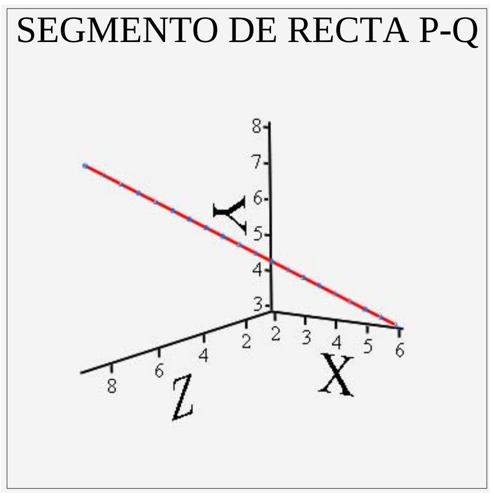
$$Q := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación del segmento de recta que los une es:

$$\mathrm{Recta}(t) := P + t \cdot (Q - P)$$

y su gráfica en 3D:

$$s := \mathrm{CreateSpace}(\mathrm{Recta}, 0, 1)$$



Interpolación circular

Se desea interpolar los puntos P y Q con un segmento de arco, cuyo radio sea igual a la distancia PQ. El segmento de arco se desea sobre el plano que forman los puntos P y Q con un punto S.

$$S := \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r := |Q - P| = 10.247$$

El plano que forman los tres puntos está definido por los vectores V1 y V2

$$V1 := \frac{P - Q}{|P - Q|} \qquad V2 := \frac{S - P}{|S - P|}$$

y la normal al plano es

$$N := \frac{V1 \times V2}{|V1 \times V2|} = \begin{pmatrix} 0.418 \\ -0.662 \\ 0.622 \end{pmatrix}$$

El punto pq situado a la mitad de la distancia entre P y Q es

$$pq := \frac{r}{2} \cdot V1 + Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 5.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Y finalmente el cálculo del centro del arco O es de altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ya que es un triángulo equilátero (la distancia de OP y la OQ debe ser igual a PQ):

$$V3 := \frac{V1 \times N}{|V1 \times N|} = \begin{pmatrix} -0.82 \\ -0.569 \\ -0.055 \end{pmatrix} \qquad O := \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot V3 + pq = \begin{pmatrix} -3.281 \\ 0.45 \\ 4.515 \end{pmatrix}$$

$$|O - P| = 10.247 \qquad |O - Q| = 10.247$$

$$Voq := \frac{Q - O}{|Q - O|} \qquad Vop := \frac{P - O}{|P - O|}$$

Cambio de base

La matriz de transformación de ejes para la interpolación es el sistema:

$$X \equiv 0 \qquad Y \equiv 1 \qquad Z \equiv 2$$

$$M^{\langle X \rangle} := Voq \qquad M^{\langle Z \rangle} := N \qquad M^{\langle Y \rangle} := M^{\langle X \rangle} \times M^{\langle Z \rangle}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.515 & 0.748 & 0.418 \\ 0.737 & -0.138 & -0.662 \\ 0.438 & -0.649 & 0.622 \end{pmatrix}$$

La ecuación paramétrica de un círculo con radio r y centro en el origen

$$ArcoParametrico(u) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(u) \\ r \cdot \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y su transformación geométrica en el sistema de ejes M

$$Arco(u) := M \cdot ArcoParametrico(u) + O$$

Evaluada en el rango: $\theta_{min} := 0$ $\qquad \theta_{max} := acos\left(\frac{Voq \cdot Vop}{|Voq| \cdot |Vop|}\right) = 60\,deg$

$$Arco(\theta_{max}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Arco(\theta_{min}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gráfica 3D