SISTEMAS AFINES DE COORDENADAS CON CAMBIO DE BASE

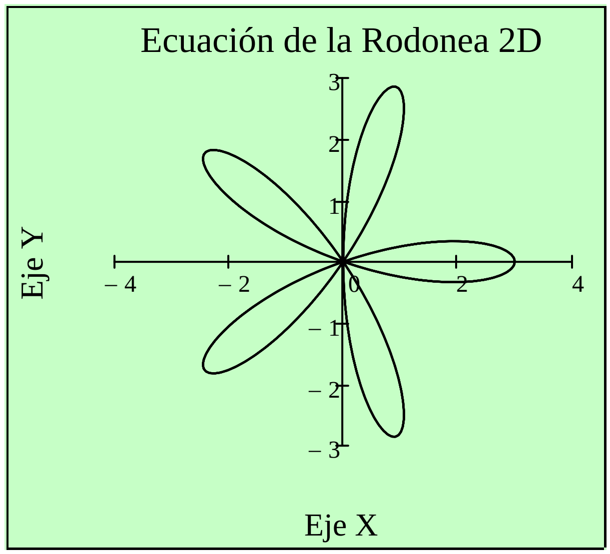
Ecuación de la rodonea

$x(t) := a \cdot \cos(m \cdot t) \cdot \cos(t)$ $y(t) := a \cdot \cos(m \cdot t) \cdot \sin(t)$ $z(t) := 0$

$a \equiv 3$ $m \equiv 5$

$$F(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$X \equiv 0$ $Y \equiv 1$ $Z \equiv 2$



Suponga que se tienen los siguientes puntos A,B,C,O y se desea "colocar" una rodonea en los planos definidos por los triángulos formados por éstos.

$$A := \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} \quad O := \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinarán las matrices de cambio de base para los planos deseados.

SISTEMA DE EJES DEL TRIANGULO A-B-C

El centro del triángulo A-B-C está definido por:

$$c := \frac{A + B + C}{3} = \begin{pmatrix} 6.667 \\ 5 \\ 16.667 \end{pmatrix}$$

Suponga que el eje X estará definido por el segmento de recta entre los puntos A y el centro del triángulo.

$$EjeX := \frac{A - c}{|A - c|} = \begin{pmatrix} 0.811 \\ -0.487 \\ 0.324 \end{pmatrix}$$

Eje #0 del sistema ABC

El eje Z estará en la normal al plano del triángulo formado por los vectores V1 y V2. Estos vectores son definidos por los segmentos de recta entre los puntos A-B y A-C.

$$V1 := \frac{A - B}{|A - B|} \qquad V2 := \frac{A - C}{|A - C|} \qquad N := V1 \times V2$$

$$EjeZ := \frac{N}{|N|} = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Eje #1 del sistema ABC

Como consecuencia de la determinación de los ejes X y Z, el eje Y se calcula ortogonal a ellos.

$$EjeY := EjeZ \times EjeX = \begin{pmatrix} 0.568 \\ 0.522 \\ -0.636 \end{pmatrix}$$

Eje #2 del sistema ABC

Cambio de base

La matriz de cambio de base es por lo tanto:

$$M_{abc}^{\langle X \rangle} := EjeX \qquad M_{abc}^{\langle Y \rangle} := EjeY \qquad M_{abc}^{\langle Z \rangle} := EjeZ$$

$$M_{abc} = \begin{pmatrix} 0.811 & 0.568 & 0.14 \\ -0.487 & 0.522 & 0.7 \\ 0.324 & -0.636 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$CurvaABC(t) := M_{abc} \cdot F(t) + c \qquad S_{abc} := CreateSpace(CurvaABC, t0, t1, res)$$

SISTEMA DE EJES DEL TRIANGULO A-B-O

El centro del triángulo A-B-O está definido por:

$$c := \frac{A + B + O}{3} = \begin{pmatrix} 11.667 \\ 11.333 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Suponga que el eje X estará definido por el segmento de recta entre los puntos A y el centro del triángulo.

$$EjeX := \frac{A - c}{|A - c|} = \begin{pmatrix} -0.185 \\ -0.925 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

Eje #0 del sistema ABO

El eje Z estará en la normal al plano del triángulo formado por los vectores V1 y V2. Estos vectores son definidos por los segmentos de recta entre los puntos A-B y A-O.

$$V1 := \frac{A - B}{|A - B|} \qquad V2 := \frac{A - O}{|A - O|} \qquad N := V1 \times V2$$

$$EjeZ := \frac{N}{|N|} = \begin{pmatrix} 0.442 \\ -0.381 \\ -0.812 \end{pmatrix}$$

Eje #1 del sistema ABO

Como consecuencia de la determinación de los ejes X y Z, el eje Y se calcula ortogonal a ellos.

$$EjeY := EjeZ \times EjeX = \begin{pmatrix} -0.878 \\ 3.192 \times 10^{-3} \\ -0.479 \end{pmatrix}$$

Eje #2 del sistema ABO

Cambio de base

La matriz de cambio de base es por lo tanto:

$$M_{abo}^{\langle X \rangle} := EjeX \qquad M_{abo}^{\langle Y \rangle} := EjeY \qquad M_{abo}^{\langle Z \rangle} := EjeZ$$

$$M_{abo} = \begin{pmatrix} -0.185 & -0.878 & 0.442 \\ -0.925 & 3.192 \times 10^{-3} & -0.381 \\ 0.333 & -0.479 & -0.812 \end{pmatrix}$$

$$CurvaABO(t) := M_{abo} \cdot F(t) + c \qquad S_{abo} := CreateSpace(CurvaABO, t0, t1, res)$$

SISTEMA DE EJES DEL TRIANGULO A-C-O

El centro del triángulo A-C-O está definido por:

$$c := \frac{A + C + O}{3} = \begin{pmatrix} 11.667 \\ 8.667 \\ 17.667 \end{pmatrix}$$

Suponga que el eje X estará definido por el segmento de recta entre los puntos A y el centro del triángulo.

$$EjeX := \frac{A - c}{|A - c|} = \begin{pmatrix} -0.282 \\ -0.958 \\ 0.056 \end{pmatrix}$$

Eje #0 del sistema ACO

El eje Z estará en la normal al plano del triángulo formado por los vectores V1 y V2. Estos vectores son definidos por los segmentos de recta entre los puntos A-C y A-O.

$$V1 := \frac{A - C}{|A - C|} \qquad V2 := \frac{A - O}{|A - O|} \qquad N := V1 \times V2$$

$$EjeZ := \frac{N}{|N|} = \begin{pmatrix} -0.381 \\ 0.058 \\ -0.923 \end{pmatrix}$$

Eje #1 del sistema ACO

Como consecuencia de la determinación de los ejes X y Z, el eje Y se calcula ortogonal a ellos.

$$EjeY := EjeZ \times EjeX = \begin{pmatrix} -0.881 \\ 0.281 \\ 0.381 \end{pmatrix}$$

Eje #2 del sistema ACO

Cambio de base

La matriz de cambio de base es por lo tanto:

$$M_{aco}^{\langle 0 \rangle} := EjeX \qquad M_{aco}^{\langle 1 \rangle} := EjeY \qquad M_{aco}^{\langle 2 \rangle} := EjeZ$$

$$M_{aco} = \begin{pmatrix} -0.282 & -0.881 & -0.381 \\ -0.958 & 0.281 & 0.058 \\ 0.056 & 0.381 & -0.923 \end{pmatrix}$$

$$CurvaACO(t) := M_{aco} \cdot F(t) + c \qquad S_{aco} := CreateSpace(CurvaACO, t0, t1, res)$$

Gráfica 3D

Los valores de la gráfica son:

lower limit: upper limit: resolución:

$t0 \equiv 0$ $t1 \equiv 10\pi$ $res \equiv 500$